

11. Hallar las ecuaciones de los planos proyectantes de la recta de intersección de los planos de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z + 6 &= 0 \\ 3x - 2y + z - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Para hallar los planos proyectantes basta eliminar, sucesivamente, z , y y x entre las dos ecuaciones; se obtienen los planos $17x - 7y - 34 = 0$, $13x - 7z - 12 = 0$ y $13y - 17z + 34 = 0$, que son los proyectantes de la recta sobre los planos xy , xz e yz .

12. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, -2, 2)$ y cuyos ángulos de dirección son 60° , 120° , 45° .

Teniendo en cuenta $\frac{x-x_1}{\cos \alpha} = \frac{y-y_1}{\cos \beta} = \frac{z-z_1}{\cos \gamma}$, resulta

$$\frac{x-1}{\cos 60^\circ} = \frac{y+2}{\cos 120^\circ} = \frac{z-2}{\cos 45^\circ}, \text{ o sea, } \frac{x-1}{-\frac{1}{2}} = \frac{y+2}{-\frac{1}{2}} = \frac{z-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2}},$$

o bien, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{\sqrt{2}}$

13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1, 3)$ y $(4, 2, -2)$.

Teniendo en cuenta $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, se obtiene $\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-3}{-2-3}$,

o sea, $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-5}$.

14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, -3, 4)$ y es perpendicular al plano $x - 3y + 2z = 4$.

Las componentes de la recta son $1, -3, 2$.

Las ecuaciones pedidas son $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{2}$ o bien, $3x + y = 0, 2y + 3z - 6 = 0$.

15. Hallar la ecuación del plano formado por las rectas

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Obsérvese que las rectas se cortan en el punto $(1, -1, 2)$.

Apliquemos la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$. Como las dos rectas pertenecen al plano, serán perpendiculares a la normal a éste. Por tanto,

$$\begin{aligned} 4A + 2B + 3C &= 0 \\ 5A + 4B + 3C &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, el punto $(1, -1, 2)$ también pertenece al plano. Luego,

$$A - B + 2C + D = 0.$$

Como tenemos cuatro incógnitas y solamente tres ecuaciones, despejemos tres de aquéllas en función de la cuarta (sistema indeterminado con infinitas soluciones).

Despejando A, C, D en función de B resulta: $A = -2B, C = 2B, D = -B$. Sustituyendo estos valores en la ecuación general y dividiendo por B se obtiene, $2x - y - 2z + 1 = 0$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar las coordenadas del punto de la recta

a) $2x - y + z - 5 = 0, x + 2y - 2z - 5 = 0$, para $z = 1$.

Sol. $(3, 2, 1)$.

b) $4x - 3y + 2z - 7 = 0, x + 4y - z - 5 = 0$, para $y = 2$.

Sol. $(7/6, 2, 25/6)$.

c) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$, para $x = 3$.

Sol. $(3, -14/3, 5/3)$.

d) $2x = 3y - 1, 3z = 4 - 2y$, para $x = 4$.

Sol. $(4, 3, -2/3)$.

e) $x = 4 - 3t, y = -1 + 4t, z = 2t - 3$, para $t = 3$.

Sol. $(-5, 11, 3)$.

2. Hallar los puntos de intersección con los planos coordenados de las rectas siguientes. Dibujar estas rectas uniendo dos de los puntos de intersección.

a) $x - 2y + z = 0, 3x + y + 2z = 7.$ Sol. $(2, 1, 0), (7, 0, -7), (0, 7/5, 14/5).$
 b) $2x - y + 3z + 1 = 0, 5x + 4y - z - 6 = 0.$ Sol. $\left(\frac{2}{13}, \frac{17}{13}, 0\right), (1, 0, -1), \left(0, \frac{17}{11}, \frac{2}{11}\right).$
 c) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-1}.$ Sol. $(13, 3, 0), (7, 0, 3), (0, -7/2, 13/2).$
 d) $2x + 3y - 2 = 0, y - 3z + 4 = 0.$ Sol. $(7, -4, 0), (1, 0, 4/3), (0, 2/3, 14/9).$
 e) $x + 2y - 6 = 0, z = 4.$ Sol. $(6, 0, 4), (0, 3, 4).$

3. Hallar las componentes y los cosenos directores de las rectas:

a) $3x + y - z - 8 = 0, 4x - 7y - 3z + 1 = 0.$ Sol. $2, -1, 5; \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}.$
 b) $2x - 3y + 9 = 0, 2x - y + 8z + 11 = 0.$ Sol. $6, 4, -1; \frac{6}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}}, \frac{-1}{\sqrt{53}}.$
 c) $3x - 4y + 2z - 7 = 0, 2x + y + 3z - 11 = 0.$ Sol. $14, 5, -11; \frac{14}{3\sqrt{38}}, \frac{5}{3\sqrt{38}}, \frac{-11}{3\sqrt{38}}.$
 d) $x - y + 2z - 1 = 0, 2x - 3y - 5z - 7 = 0.$ Sol. $11, 9, -1; \frac{11}{\sqrt{203}}, \frac{9}{\sqrt{203}}, \frac{-1}{\sqrt{203}}.$
 e) $3x - 2y + z + 4 = 0, 2x + 2y - z - 3 = 0.$ Sol. $0, 1, 2; 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}.$

4. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $x - 2y + z - 2 = 0, 2y - z - 1 = 0$
 $y \ x - 2y + z - 2 = 0, x - 2y + 2z - 4 = 0.$ Sol. $78^\circ 27,8'.$

5. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{6}$ y $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6}$
 $= \frac{z+4}{-2}.$ Sol. $79^\circ 1'.$

6. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas
 $2x + 2y + z - 4 = 0, x - 3y + 2z = 0$ y $\frac{x-2}{7} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-4}{-6}.$ Sol. $49^\circ 26,5'.$

7. Hallar el ángulo agudo formado por la recta $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{-6}$ y el plano $2x - 2y$
 $+ z - 3 = 0.$ Sol. $26^\circ 23,3'.$

8. Hallar el ángulo agudo que forma la recta que pasa por los puntos $(3, 4, 2), (2, 3, -1)$ con la que
 une $(1, -2, 3), (-2, -3, 1).$ Sol. $36^\circ 19'.$

9. Demostrar que la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$ es paralela al plano $6x + 7y - 5z - 8 = 0.$

10. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, 1, -2)$ y es perpendicular al plano
 $3x - 5y + 2z + 4 = 0.$ Sol. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{2}.$

11. Hallar las ecuaciones de la recta,

a) Que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y es paralela al eje $x.$ Sol. $y + 1 = 0, z - 3 = 0.$
 b) Que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y es paralela al eje $y.$ Sol. $x - 2 = 0, z - 3 = 0.$
 c) Que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y es paralela al eje $z.$ Sol. $x - 2 = 0, y + 1 = 0.$
 d) Que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y tiene de cosenos directores $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{3}.$

Sol. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{\pm\sqrt{23}}.$

12. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-6, 4, 1)$ y es perpendicular al plano $3x - 2y + 5z + 8 = 0$.
Sol. $2x + 3y = 0, 5y + 2z - 22 = 0$.
13. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, 0, -3)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + 6 = 0$.
Sol. $3x + 2y - 6 = 0, z + 3 = 0$.
14. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $x - 3y + 2z + 4 = 0$.
Sol. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{2}$.
15. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $(2, -3, 4)$ y $(5, 2, -1)$.
Sol. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{-5}$.
16. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos
- a) $(1, 2, 3)$ y $(-2, 3, 3)$. Sol. $x + 3y - 7 = 0, z = 3$.
- b) $(-2, 2, -3)$ y $(2, -2, 3)$. Sol. $x + y = 0, 3y + 2z = 0$.
- c) $(2, 3, 4)$ y $(2, -3, -4)$. Sol. $x - 2 = 0, 4y - 3z = 0$.
- d) $(1, 0, 3)$ y $(2, 0, 3)$. Sol. $y = 0, z = 3$.
- e) $(2, -1, 3)$ y $(6, 7, 4)$ en forma paramétrica. Sol. $x = 2 + \frac{4}{9}t, y = -1 + \frac{8}{9}t, z = 3 + \frac{1}{9}t$.
17. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $(1, -2, 3)$ y es paralela a los planos $2x - 4y + z - 3 = 0$ y $x + 2y - 6z + 4 = 0$.
Sol. $\frac{x-1}{22} = \frac{y+2}{13} = \frac{z-3}{8}$.
18. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1, 4, -2)$ y es paralela a los planos $6x + 2y + 2z + 3 = 0$ y $3x - 5y - 2z - 1 = 0$.
Sol. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{-6}$.
19. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-2, 4, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por $(1, 3, 4)$ y $(-2, 2, 3)$.
Sol. $x - 3y + 14 = 0, y - z - 1 = 0$.
20. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(3, -1, 4)$ y es perpendicular a las rectas cuyas componentes son $3, 2, -4$ y $2, -3, 2$.
Sol. $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-4}{13}$.
21. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, 2, -3)$ y es perpendicular a las rectas cuyas componentes son $2, -1, 3$ y $-1, 2, 0$.
Sol. $x - 2y + 2 = 0, y + z + 1 = 0$.
22. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(2, -2, 4)$ y cuyos ángulos de dirección son $120^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.
Sol. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{\sqrt{2}}$.
23. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(-2, 1, 3)$ y cuyos ángulos de dirección son $135^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.
Sol. $\frac{x+2}{-\sqrt{2}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$.
24. Hallar las ecuaciones de la recta,
- a) Que pasa por el punto $(0, 2, -1)$ y tiene de componentes, $1, -3, 4$.
Sol. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.
- b) Que pasa por el punto $(-1, 1, -3)$ y tiene de componentes, $\sqrt{2}, 3, -4$.
Sol. $\frac{x+1}{\sqrt{2}} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-4}$.
- c) Que pasa por el punto $(0, 0, 0)$ y tiene de componentes $1, 1, 1$.
Sol. $x = y = z$.
- d) Que pasa por el punto $(-2, 3, 2)$ y tiene de componentes, $0, 2, 1$.
Sol. $x + 2 = 0, y - 2x + 1 = 0$.
- e) Que pasa por el punto $(1, -1, 6)$ y tiene de componentes, $2, -1, 1$.
Sol. $x = 2z - 11, y = -z + 5$.

25. Demostrar que la recta $x = \frac{2}{7}z + \frac{15}{7}$, $y = -\frac{5}{7}z - \frac{34}{7}$ es perpendicular a la recta $x - y - z - 7 = 0$, $3x - 4y - 11 = 0$.
26. Demostrar que las rectas $x + 2y - z - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$ y $\frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-5} = \frac{z}{1}$ son perpendiculares.
27. Demostrar que las rectas $3x - 2y + 13 = 0$, $y + 3z - 26 = 0$ y $\frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$ son perpendiculares.
28. Demostrar que las rectas $\frac{x-3}{1} = \frac{y+8}{-2} = \frac{z+6}{-11}$ y $3x + 5y + 7 = 0$, $y + 3z - 10 = 0$ son perpendiculares.
29. Demostrar que las rectas $x - 2y + 2 = 0$, $2y + z + 4 = 0$ y $7x + 4y - 15 = 0$, $y + 14z + 40 = 0$ son perpendiculares.
30. Demostrar que la recta $\frac{x-2}{10} = \frac{2y-2}{11} = \frac{z-5}{7}$ está situada en el plano $3x - 8y + 2z - 8 = 0$.
Para demostrar que una recta está situada en un plano hay que comprobar que dos puntos de la recta pertenecen al plano, o bien, que un punto de la recta está situado en el plano y que dicha recta es perpendicular a él.
31. Demostrar que la recta $y - 2x + 5 = 0$, $z - 3x - 4 = 0$ está situada en el plano $9x + 3y - 5z + 35 = 0$.
32. Demostrar que la recta $x - z - 4 = 0$, $y - 2z - 3 = 0$ está situada en el plano $2x + 3y - 8z - 17 = 0$.
33. Demostrar que la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$ está situada en el plano $2x + 3y - 2z + 10 = 0$.
34. Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta $2x - y - 2z - 5 = 0$, $4x + y + 3z - 1 = 0$ con el plano $8x - y + z - 5 = 0$. Sol. $(3/2, 4, -3)$.
35. Hallar el punto de intersección de la recta $x = z + 2$, $y = -3z + 1$ con el plano $x - 2y - 7 = 0$. Sol. $(3, -2, 1)$.
36. Hallar el punto de intersección de la recta $\frac{x}{1} = \frac{2y-3}{1} = \frac{2z-1}{5}$ con el plano $4x - 2y + z - 3 = 0$. Sol. $(1, 2, 3)$.
37. Hallar el punto de intersección de la recta $x + 2y + 4z - 2 = 0$, $2x + 3y - 2z + 3 = 0$ con el plano $2x - y + 4z + 8 = 0$. Sol. $(-4, 2, 1/2)$.
38. Hallar las ecuaciones de la recta situada en el plano $x + 3y - z + 4 = 0$ y que es perpendicular a la recta $x - 2z - 3 = 0$, $y - 2z = 0$ en el punto en que ésta corta a dicho plano. Sol. $3x + 5y + 7 = 0$, $4x + 5z + 1 = 0$.
39. Demostrar que los puntos $(2, -3, 1)$, $(5, 4, -4)$ y $(8, 11, -9)$ están en línea recta.
40. Hallar el punto de intersección de las rectas $2x + y - 5 = 0$, $3x + z - 14 = 0$ y $x - 4y - 7 = 0$, $5x + 4z - 35 = 0$. Sol. $(3, -1, 5)$.
41. Hallar el punto de intersección de las rectas $x - y - z + 8 = 0$, $5x + y + z + 10 = 0$ y $x + y + z - 2 = 0$, $2x + y - 3z + 9 = 0$. Sol. $(-3, 3, 2)$.
42. Hallar el punto de intersección de las rectas $x + 5y - 7z + 1 = 0$, $10x - 23y + 40z - 27 = 0$ y $x - y + z + 1 = 0$, $2x + y - 2z + 2 = 0$. Sol. $(-1/38, 148/38, 111/38)$.
43. Escribir, en forma continua, las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos fijos $(3, -1, 2)$, $(4, -6, -5)$ y $(0, 0, -3)$.
Sol. $\frac{x}{16} = \frac{y+175/32}{13} = \frac{z+19/32}{-7}$.
44. Escribir, en forma continua, las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos equidistantes de los puntos fijos $(3, -2, 4)$, $(5, 3, -2)$ y $(0, 4, 2)$.
Sol. $\frac{x-18/11}{26} = \frac{y}{22} = \frac{z+9/44}{27}$.